

Title	保型函数の微分方程式 (幾何学における大域的解析学)
Author(s)	寺西, 鎮男
Citation	数理解析研究所講究録 (1978), 321: 34-59
Issue Date	1978-03
URL	http://hdl.handle.net/2433/104019
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

保型函数の微分方程式

名大・理 寺西 鎮男

Ω を \mathbb{C} の領域とし、 $\Gamma \in \text{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ の discrete な部分群で、 Γ に関する、保型函数体が、超越次数が n の体であると仮定する。この時、次の定理が成立する。これは、 $n=1$ の時 Hurwitz の定理として、よく知られている。

定理； 任意の、 Γ -保型形式は、order が高々 $2n+1$ の、代数的微分方程式を、満足する。

Ω 内で、次の型の、rank $n+1$ の、完全積分可能な、方程式系

$$L_{ij}(p(\tau, y)) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n R_{j\alpha}^{(1)}(\tau) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + R_{j0}^{(1)}(\tau) \cdot y = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n, 1 \leq \alpha \leq n)$$

の、一組の基本解、 $y_0(\tau), y_1(\tau), \dots, y_n(\tau)$ の Wronskian が non-zero な constant の時、微分方程式系、 $L_{ij}(p(\tau, y)) = 0 \quad (1 \leq i, j \leq n)$ は、半標準形と呼ばれる。これについて、次の事が成り立つ、

定理； $\tau_1(z), \dots, \tau_n(z)$ が、定数でない、 Γ -保型函数で、代数独立であるとする、 $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega$ の各成分 z_i は、

半標準形、 $L_{ij}(p|\tau, y) = 0$ ($1 \leq i \leq j \leq n$) の基本解、 $y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)$ を用いて、 $z_i = y_i(\tau)/y_0(\tau)$ ($1 \leq i \leq n$) とし、表わす事ができ、更に、 $g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ で、 $\alpha=0$ の時、 $R_{ij}^{(0)}(\tau)$ 、 $\alpha \neq 0$ の時、 $\tau_\alpha R_{ij}^{(0)}(\tau) + R_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ を表わす事にすれば、 $f_\alpha(\tau) = \det(g_{ij}^{(\alpha)}(\tau))$ ($\alpha=0, 1, \dots, n$) は、全て、 τ の代数函数である様にできる。

§ 1, 半標準形、及び、標準形

二階の完全積分可能な rank $n+1$ の微分方程式系

$$L_{ij}(p|\tau, y) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + R_{ij}^{(0)}(\tau) y \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

で、独立変数 $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$ と従属変数 $y(\tau)$ の変換の、pseudo-group G を次の様に定義する。

$$\text{Def. 1.1 } G = \left\{ p_{u, \lambda} : (\tau, y) \longrightarrow (u(\tau), \lambda(\tau)y), \det\left(\frac{\partial u_i}{\partial \tau_j}\right) \neq 0 \right\}$$

G_1, G_2 , で G の次の部分群を表わすものとする。

$$G_1 = \{ p_{id, \lambda} \}, \quad G_2 = \{ p_{u, 1} \}$$

Lemma 1.1

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 y \cdot \lambda(\tau)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha} R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial (y \cdot \lambda)}{\partial \tau_\alpha} + R_{ij}^{(0)}(\tau) y \cdot \lambda \right) \\ &= \lambda \cdot \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_i} \right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta} \right)^t \left(\frac{\partial \tau}{\partial \tau_j} \right) + \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial^2 (\tau_\alpha \cdot \lambda)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} - \frac{\tau_\alpha \partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \lambda \sum_{\alpha} R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \right) \\ & \quad \times \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \tau_i} \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + y \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_\alpha} + R_{ij}^{(0)}(\tau) \lambda \right) \end{aligned}$$

proof.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y \cdot \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} &= \frac{\partial}{\partial \tau_i} \left(\left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \tau_j} \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} \right) \lambda + \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_i} y \right) \\ &= \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \tau_i} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \tau_j} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta} \right) \cdot \lambda + \sum_{\alpha} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} \cdot \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_j} \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} y + \sum_{\alpha} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} \\
& = \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_j} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_{\alpha} \partial \tau_{\alpha}} \right) \lambda + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 \tau_{\alpha}}{\partial z_i \partial z_j} \lambda + \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} + \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_j} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} \right) \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} y \\
& \text{と ころ で、} \\
& \frac{\partial^2 \tau_{\alpha}}{\partial z_i \partial z_j} \lambda + \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} + \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_j} \frac{\partial \lambda}{\partial z_i} = \frac{\partial^2 (\tau_{\alpha} \cdot \lambda)}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\tau_{\alpha} \partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} \quad \text{だから、結局、} \\
& \frac{\partial^2 y \cdot \lambda}{\partial z_i \partial z_j} = \left(\sum_{\alpha} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_j} \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_{\alpha} \partial \tau_{\alpha}} \right) \lambda + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 (\tau_{\alpha} \cdot \lambda)}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\tau_{\alpha} \partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j} \right) \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} + y \cdot \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_i \partial z_j}
\end{aligned}$$

この式と、 $\frac{\partial}{\partial z_i} y \cdot \lambda = \sum_{\alpha} \frac{\partial \tau_{\alpha}}{\partial z_i} \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} \cdot \lambda + y \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial z_i}$ に注意すれば、

Lemma の等式が得られる。 g.e.d //

次に pseudo group G の $P_j^{(u)}$ の作用を定義しよう。

Def. 12

$$L(P_{z,\lambda}^*(p) | \tau, y) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} L(P(z) | z, \lambda y) \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1}$$

ここで、 $L(P | \tau, y)$ は、 (z, y) 成分が、 $L_{ij}(P | \tau, y)$ の $n \times n$ 対称行列を表わすものとする。

前の Lemma から、 $L(P_{z,\lambda}^*(p) | \tau, y)$ は、 $L(P | \tau, y)$ と 同一の type の system である。

$L(P_{z,\lambda}^*(p) | \tau, y) = L(P^*(\tau) | \tau, y)$ とする時、 G の $P_j^{(u)}(\tau)$ の作用を、 $P_{z,\lambda}(P_j^{(u)}(\tau)) = P_j^{*(u)}(\tau)$ によって定義する。

Def. 13

rank $n+1$ の 完全積分可能な微分方程式系の一群の、基本解 $y_0(\tau), \dots, y_n(\tau)$ の、Wronskian が non-zero な constant であるとき、その微分方程式系を、半標準形と言う。

即ち、 $L_{ij}(p|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$): 半標準形

$$\Leftrightarrow W(\varphi_0, \dots, \varphi_n) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \dots & \varphi_n \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} : \text{non-zero const.}$$

prop. rank $n+1$ の完全積分可能な微分方程式系は、 G_\pm の作用で、半標準形にする事ができる。

上の、prop. は、吉田 氏による。なお、この prop. の 1 の一般化については、Appendix 1. を参照の事。

Def. 6.4

rank $n+1$ の完全積分可能な微分方程式系 $L_{ij}(p|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) で、 $p_{ij}^{(\alpha)} = 0$ ($0 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq i, j \leq n$) の時、 $L_{ij}(p|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) は、標準形であると言う。

prop. 1.1 完全積分可能な微分方程式系 (rank = $n+1$) は、 G の作用で、標準形にする事ができる。

proof. Lemma [1.1] により、次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 y \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha} p_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial (y \lambda)}{\partial \tau_{\alpha}} + p_{ij}^{(0)}(\tau) y \lambda \right) \\ &= \lambda \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \tau_{\alpha} \partial \tau_{\beta}} \right)^{\alpha} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right) + \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial^2 (z_{\alpha} \lambda)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} - \frac{z_{\alpha} \partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \lambda \sum_{\beta} p_{ij}^{(\beta)} \frac{\partial z_{\alpha}}{\partial \tau_{\beta}} \right) \frac{\partial y}{\partial \tau_{\alpha}} \\ &+ y \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha} p_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_{\alpha}} + p_{ij}^{(0)}(\tau) \lambda \right) \end{aligned}$$

この関係式で、 $\lambda, z_1 \lambda, \dots, z_n \lambda$ が、微分方程式系 $L_{ij}(p|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) の一組の、基本解となる様に、 λ, z_1, \dots, z_n を定める。

この時、

$$\frac{\partial^2(z_\alpha \cdot \lambda)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} = - \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) z_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_\alpha} - \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \lambda \frac{\partial z_\alpha}{\partial \tau_\alpha} - P_{ij}^{(0)}(\tau) z_\alpha \cdot \lambda$$

$$z_\alpha \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} = - \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) z_\alpha \frac{\partial \lambda}{\partial \tau_\alpha} - z_\alpha P_{ij}^{(0)}(\tau) \lambda$$

となる事に注意すれば、 $\frac{\partial^2(z_\alpha \cdot \lambda)}{\partial \tau_i \partial \tau_j} - \frac{z_\alpha \partial^2 \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \lambda \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial z_\alpha}{\partial \tau_\alpha} = 0$
従って、次の matrix relation を得る、

$$\left(\frac{\partial^2 \lambda \cdot \lambda}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_\alpha P_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial(z \cdot \lambda)}{\partial \tau_\alpha} + P_{ij}^{(0)}(\tau) \lambda \right) = \lambda \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta} \right)^t \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)$$

s.e.d //

Def. 1.5

$$Z = (z_1, \dots, z_n), \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_n)$$

$$\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (\tau_\alpha \cdot j^{\frac{1}{n+1}}) - \tau_\alpha \frac{\partial^2 j^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i \partial z_j} \quad (\alpha=1, \dots, n)$$

$$\{z, \tau\}_{ij}^{(0)} = \frac{\partial^2 j^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i \partial z_j}$$

$$(\text{ただし、} \quad j = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{pmatrix})$$

$\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=0,1,2,\dots,n$) は、 $PSL(n+1)$ の Schwarzian derivative と呼ばれている物と、本質的に同じである。 $\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ 達の、定義から、全ての $\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ ($\alpha=0,1,2,\dots,n$) に于いて、 $\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} = 0 \iff$
又か、この、projective _{linear} transformation, $\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)}$ の変換法則は、Lemma [1] を用いれば、簡明に、出す事ができる。即ち、

Lemma [1] より、

$$\frac{\partial^2 \varphi(\tau) j^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i \partial z_j} = \left(\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial \tau_\alpha}{\partial z_j} \frac{\partial \tau_\beta}{\partial z_i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta} \right) j^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^n \{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} + \varphi \{z, \tau\}_{ij}^{(0)}$$

$f(z) = \varphi(\tau) \det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ とおく時、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial w_i \partial w_j} \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}} \right) &= \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) \left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right)^t \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^n \left(\{w, z\}_{ij}^{(\alpha)} \right) \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} + \varphi \{w, z\}_{ij}^{(0)} \\ \left(\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right) &= \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right)^t \left(\frac{\partial z}{\partial z} \right) \det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^n \left(\{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} + \varphi \{z, \tau\}_{ij}^{(0)} \end{aligned}$$

ところで、 $\frac{\partial^2 f(z) \det(\frac{\partial w}{\partial z})^{\frac{1}{n+1}}}{\partial w_i \partial w_j} = \frac{\partial^2 \varphi(\tau) \det(\frac{\partial w}{\partial \tau})^{\frac{1}{n+1}}}{\partial w_i \partial w_j}$ である。

以上の事から、次の prop. が得られる。

prop. 1.2 $f(z) = \varphi(\tau) \det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ とおく時、

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{\alpha} \{w, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} + \varphi \{w, \tau\}_{ij}^{(0)} \right) \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) \left(\sum_{\alpha} \{z, \tau\}_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} + \{z, \tau\}_{ij}^{(0)} \varphi \right)^t \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\quad + \left(\sum_{\alpha} \{w, z\}_{ij}^{(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial z_\alpha} + \varphi \{w, z\}_{ij}^{(0)} \right) \end{aligned}$$

次に、後で、使う為に、少し別の型の、Schwarzian derivative の一般化を考える。 $\varphi(\tau)$ の τ に関する Hessian を $\text{Hess}_\tau(\varphi)$ で表わす事にする。 $\{z, \tau\}_\varphi$ を次の式によって定義する。

$$\begin{aligned} \text{Def. 1.6} \quad \text{Hess}_z(\varphi(\tau), j^{\frac{1}{n+1}}) &= j^{-(1+\frac{1}{n+1})} (\text{Hess}_\tau \varphi + \{z, \tau\}_\varphi \cdot \varphi) \\ &\quad (\text{但し, } j = \det\left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)) \end{aligned}$$

次の Lemma は、 $\{z, \tau\}_\varphi$ が、1変数の場合の、classical な、

Schwarzian derivative の拡張になっている事を示している。

なお、別の変換群が作用している、空間での $\{z, \tau\}_\varphi$ の、拡張については、Appendix 2 を参照の事。

Lemma 1.2

(1) z が τ の projective linear transformation の時.

$$\{z, \tau\}_\varphi = 0$$

(2) $\{\sigma(z), \tau\}_\varphi = \{z, \tau\}_\varphi$ (但し, $\sigma \in \text{PSL}(n+1)$.)

(3) $\varphi(\tau) = \mu(w) \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$ とおくと.

$$\{z, w\}_\mu = \{\tau, w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{z, \tau\}_\varphi$$

(4) $\{\tau, w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{w, \tau\}_\varphi = 0$

Proof.

(1) は、 z が τ の 1 次分数変換の時には、

$\left(\frac{\partial^2 \varphi(\tau)}{\partial z_i \partial z_j}\right)^{\frac{1}{n+1}} = \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j}\right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ が成り立つ事から
明らかである。次に (3) を証明する。

$$\text{Hess}_z(\varphi \cdot \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}) = \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{1+\frac{1}{n+1}} (\text{Hess}_w \varphi(\tau) + \{z, w\}_{\mu(w)})$$

$$\text{一方、} \varphi \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = \mu \cdot \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{従って、} \text{Hess}_z(\varphi(\tau) \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}) = \det\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{1+\frac{1}{n+1}} (\text{Hess}_w \mu(w) + \{\tau, w\}_\mu + \left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{z, \tau\}_\varphi \cdot \mu)$$

$$\text{よって、} \{z, w\}_\mu = \{\tau, w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{z, \tau\}_\varphi$$

(2) は、(3) で $z = \tau$ の 1 次分数変換とおけば、(1) により

$$\{\sigma(\tau), w\}_\mu = \{\tau, w\}_\mu \quad \sigma \in \text{PSL}(n+1)$$

(4) は、(3) で、 $z = w$ の 1 次分数変換とおけば、

$$0 = \{\tau, w\}_\mu + \det\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{\sigma(w), \tau\}_\varphi \quad (2) \text{ を用いれば。}$$

(4) が得られる。

8.9, d //

Lemma 43 $\Gamma \in \mathrm{PSL}(n+1)$ の部分群として、 $\varphi(\tau)$ が、

$$\varphi(\sigma\tau) = \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau}\right)^{\frac{1}{n+1}} \varphi(\tau) \quad \forall \sigma \in \Gamma \quad \text{をみたすとする.}$$

$$[z, \tau]_{\varphi(\tau)} = \{z, \tau\}_{\varphi(\tau)} (d\tau_1 \wedge \cdots \wedge d\tau_n)^{\frac{n+3}{n+1}} \quad \text{とおけば、}$$

$$[z, \sigma\tau]_{\varphi(\sigma\tau)} = [z, \tau]_{\varphi(\tau)}$$

proof.

$$\begin{aligned} & \text{Lemma [12] の (4) から、} \{z, \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} + \{ \sigma\tau, z \}_{\varphi(\sigma\tau) \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \det\left(\frac{\partial\sigma\tau}{\partial z}\right)} \\ & = 0, \quad \text{ところで、仮定より、} \varphi(\sigma\tau) \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}} = \varphi(\tau) \det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}} \\ & \text{よって、} \{z, \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} + \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \{ \tau, z \}_{\varphi(\tau) \det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-\frac{1}{n+1}}} = 0. \end{aligned}$$

再び、Lemma [] の (4) を用いければ、

$$\{z, \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} - \{z, \tau\}_{\varphi(\tau)} \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} \det\left(\frac{\partial\tau}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}} = 0$$

$$\text{従って、} \{z, \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)} = \{z, \tau\}_{\varphi} \det\left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial z}\right)^{-1-\frac{2}{n+1}}$$

$$\therefore [z, \sigma\tau]_{\varphi(\sigma\tau)} = [z, \tau]_{\varphi(\tau)} \quad \text{g.e.d //}$$

次の § では、 $\mathrm{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ の discrete な部分群に関する、保型形式と、半標準型との関係を調べる。

§2, 保型形式の微分方程式

この § では、保型形式の満たす微分方程式についての考察を行なう。以下、 Ω を \mathbb{C} の領域とし、 Γ を $PSL(n+1, \mathbb{C})$ の discrete な部分群で、 Γ に関する、保型函数のなす体の超越次数が n であると仮定する。

Lemma 2.1 $z_1(\tau), \dots, z_n(\tau)$, ($\tau \in \Omega$) を代数独立な、保型函数であるとする。その時

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} \quad \text{は weight } n+1 \text{ の保型形式である.}$$

Lemma 2.2 $\varphi(\tau)$ を weight k の保型形式であるとする。

その時、

$$\Phi(\varphi) = \begin{vmatrix} k\varphi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} & (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} \\ \vdots & \vdots \\ (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_n} & \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_n} & 1 \end{vmatrix} \quad \text{は,}$$

weight $2n(k+1)+2$ の保型形式である。(但し、 $k \neq 0$ とする)

proof. Schwarzian derivative $\{z, \tau\}_\varphi$ の定義から、

$$\text{Hess}_z(\varphi(\tau) \cdot j^{\frac{1}{n+1}}) = j^{-\frac{1}{n+1}} (\text{Hess}_\tau \varphi + \{z, \tau\}_\varphi \varphi)$$

において、 $\varphi(\tau)$ が weight -1 の保型形式ならば、 z を τ の一次分数変換とすれば、 $\text{Hess}_z \varphi$ は weight $n+2$ の保型形式である事が、わかる。従って、今の場合、 $\text{Hess}_\tau \varphi$ は、weight k が

$n+3$ の保型形式である。よって、 $\varphi^{n(2+\frac{1}{k})} \text{Hess}_\tau \varphi^{-\frac{1}{k}}$ は、
weight が、 $2n(k+1)+2$ の、保型形式である事に注意する。

$$\begin{aligned}
 & \varphi^{n(2+\frac{1}{k})} \text{Hess}_\tau \varphi^{-\frac{1}{k}} \\
 &= \det \left(\varphi^{2+\frac{1}{k}} \frac{\partial^2 \varphi^{-\frac{1}{k}}}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right) \\
 &= \det \left(\varphi^{2+\frac{1}{k}} \frac{\partial}{\partial \tau_j} \left(-\frac{1}{k} \varphi^{-1-\frac{1}{k}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} \right) \right) \\
 &= \det \left(\varphi^{2+\frac{1}{k}} \left(\frac{1}{k} \left(1+\frac{1}{k}\right) \varphi^{-2-\frac{1}{k}} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_j} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} - \frac{1}{k} \varphi^{-1-\frac{1}{k}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right) \right) \\
 &= \det \left(\frac{k+1}{k^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_j} - \frac{1}{k} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right) \\
 &= \left(\frac{-1}{k^2} \right)^n \left| \begin{array}{cc|c} k \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} - (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_j} & (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} & \vdots \\ \hline \text{O} & (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_n} & 1 \end{array} \right| \\
 &= \left(\frac{-1}{k^2} \right)^n \left| \begin{array}{c|c} k \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} & \begin{matrix} (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ (k+1) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_n} \end{matrix} \\ \hline \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_n} & 1 \end{array} \right| \\
 &= \left(\frac{-1}{k^2} \right)^n \Phi(\varphi)
 \end{aligned}$$

従って、 $\Phi(\varphi)$ は weight が $2n(k+1)+2$ の保型形式である。

g.e.d.

この Lemma を用いて、保型形式が、ある order 以下の、代数的微分方程式を満足しなければ、ならない事を、次に証明しよう。

定理 2.1 $\text{weight } k (k \neq 0)$ の保型形式は、 n が高々、 $< n+1$ の、代数的微分方程式を満足する。

Proof. $\varphi(z)$ を $\text{weight } k (k \neq 0)$ の保型形式であるとする。
Lemma 1 によって $\psi(\varphi)$ は、 $\text{weight } k' = 2n(k+1) + 2$ の保型形式である。以下、 $\psi^{(n)}(\varphi) = \underbrace{\psi \cdots \psi}_{n \text{ 回}}(\varphi)$ によって、保型形式を次々に作って行く。 $\psi^{(n)}(\varphi)$ ($n=1, 2, \dots$) の weight を $k^{(n)}$ とする。 $\varphi, \psi^{(1)}(\varphi), \dots, \psi^{(n)}(\varphi)$ が、代数独立でなければ、その関係式が、 φ を満たす、代数的微分方程式であるから、 $\varphi, \psi^{(1)}(\varphi), \dots, \psi^{(n)}(\varphi)$ は、代数独立であるとしてよい。

$f^{(n)} = \frac{\psi^{(n)}(\varphi)^k}{\varphi^{k^{(n)}}}$ ($n=1, 2, \dots$) とおけば、 $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ は、代数独立な、保型函数である。一方、Lemma 2 によれば、

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial z_n} \end{vmatrix}$$

は weight が $n+1$ の保型形式

である。これを $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ で表わすと、 $\frac{f^{(1)} \cdots f^{(n)}}{\varphi^{n+1}}$ は、保型函数で、保型函数体の超越次数は n と仮定しているから、 $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}, \frac{f^{(1)} \cdots f^{(n)}}{\varphi^{n+1}}$ は、代数独立では、ありえない。従って、その関係式は、 φ の代数的微分方程式とあり、その weight は、作り方から、高々、 $< n+1$ である事は、明かである。

□. 〃

注 $n=1$ のとき、これは、Hurwitz の定理として、よく知られている。H.L. Knesnikoff は、Hurwitz の定理を、既約な、tube domain の保型形式の場合に、拡張した。
次に、 n 個の、代数独立な保型函数と、半標準形との関係について、調べる。

定理 2.2

$\tau_1(z), \dots, \tau_n(z)$ を、 n 個の^{代数}独立な、保型函数とする。

その時、 $Z = (z_1, \dots, z_n)$ の各成分 z_i は、ある、rank $n+1$ の完全積分可能な、微分方程式系で、半標準形とな、っているもの

の、一組の基本解の組、 $\varphi_0(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)$ の商として、

$$z_i = \varphi_i(\tau) / \varphi_0(\tau) \quad (1 \leq i \leq n) \text{ と書ける。}$$

しかも、その半標準形を、 $L_{ij}(p(\tau), y) = \frac{\partial^2 g}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n p_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial^2 g}{\partial \tau_i \partial \tau_\alpha}$
 $+ p_{ij}^{(0)}(\tau) y \quad (1 \leq i, j \leq n)$ として、

$$g_{ij}^{(\alpha)}(\tau) = \begin{cases} p_{ij}^{(0)}(\tau) & (\alpha=0) \\ \alpha p_{ij}^{(0)}(\tau) + p_{ij}^{(\alpha)}(\tau) & (\alpha \neq 0) \end{cases}$$

によって、 $g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)$ を定めれば、 $\det(g_{ij}^{(\alpha)}(\tau)) \quad (\alpha=0, 1, 2, \dots, n)$

達は、 τ_1, \dots, τ_n の代数函数になる様にできる。

proof.

$\varphi_0(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)$ を、 $\varphi_0 = \det \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n+1}}$, $\varphi_i = z_i \varphi_0 \quad (1 \leq i \leq n)$

によって定める、この時、明らかに、

$$\frac{\partial^2 \varphi_i \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n+1}}}{\partial z_i \partial z_j} = 0 \quad (0 \leq i \leq n) \quad \text{である。}$$

従って、Lemma 2.1 を用いれば、次の行列の、関係式を得る。

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta}\right)^t \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-1} \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}} + \sum_{\alpha=1}^n \left(\tau, \tau_{\beta_j}^{(\alpha)}\right) \frac{\partial \tau}{\partial \tau_\alpha} + \tau_\beta \left(\tau, \tau_{\beta_j}^{(0)}\right) = (0) \\ (0 \leq \beta \leq n)$$

$$\text{よって, } (P_{\beta_j}^{(\alpha)}(\tau)) = \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-1} \left(\tau, \tau_{\beta_j}^{(\alpha)}\right)^t \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-1} \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n+1}} \\ (\alpha = 0, 1, \dots, n)$$

と置けば、上式は、

$$\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \tau_\alpha \partial \tau_\beta}\right) + \sum_{\alpha=1}^n (P_{\beta_j}^{(\alpha)}(\tau)) \frac{\partial \tau}{\partial \tau_\alpha} + (P_{\beta_j}^{(0)}) \tau_\beta = (0)$$

となる。

$\tau_1(z), \dots, \tau_n(z)$ は、保型函数であるから、Lemma [] により、

$\det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)$ は、weight $n+1$ の保型形式である。Schwarzian

derivative $\{\tau, \tau\}_\varphi$ の定義の式から、 $\det\{\tau, \tau\}_{\beta_j}^{(0)} = \left| \frac{\partial^2 \tau}{\partial z_i \partial z_j} \right|$ は、

weight $n+2$ の、保型形式である。(但しここで $j = \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)$)

$$\text{よって, } \det(g_{\beta_j}^{(0)}(\tau)) = \det(P_{\beta_j}^{(0)}(\tau)) = \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{-2} \det\left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

$\times \det\{\tau, \tau\}_{\beta_j}^{(0)}$ は、weight を計算する事によって、 τ の保型函数である事がわかる。(見かけ上、 j の分母の中が、 τ で来ているが、 $\det(g_{\beta_j}^{(0)}(\tau))$ は、 $\tau_1(z), \dots, \tau_n(z)$ を z として、偏微分したものの、多項式となっている事に注意して下さい。)

$\alpha \neq 0$ の時は、 $\{\tau, \tau\}_{\beta_j}^{(\alpha)} + \tau_\alpha \{\tau, \tau\}_{\beta_j}^{(0)} = \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} (\tau_\alpha \cdot j^{\frac{1}{n+1}})$ である事に注意すれば、 $\alpha = 0$ の時と同様にして、 $\det(g_{\beta_j}^{(\alpha)})$ は、 τ の保型函数である事がわかる。保型函数体の超越次数が n であり、 $\tau_1(z), \dots, \tau_n(z)$ は、代数独立な、保型函数であったから

ら、 $\tau_1(z), \dots, \tau_n(z), \det(g_{ij}^{(\alpha)})$ は、代数独立であり得ない。従って、 $\det(g_{ij}^{(\alpha)})$ ($\alpha=0,1,2,\dots,n$) 達は、すべて、 τ_1, \dots, τ_n の、代数関数である。次に、今、定義した、微分方程式系が、半標準系である事を証明する。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \det \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{\frac{1}{n+1}} \right)^T \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{-1} \det \left(\frac{\partial \tau}{\partial z} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \right) + \sum_{\alpha=1}^n (R_{ij}^{(\alpha)}(\tau)) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_\alpha} + (R_j^{(0)}) \varphi \end{aligned}$$

であるから、微分方程式系 $L_{ij}(P(\tau), y) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + R_j^{(0)}(\tau) y$ ($1 \leq i, j \leq n$) の解は、 $\varphi \cdot \det \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{\frac{1}{n+1}} = z_1, \dots, z_n$ の 1 次以下の多項式全体である。従って、微分方程式系 $L_{ij}(P(\tau), y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) は、rank $n+1$ の、完全積分可能な系である。

$$\begin{vmatrix} \varphi_0, \dots, \varphi_n \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n}, \dots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} = \varphi_0 \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} z_1 + \varphi_0 \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1}, \dots, \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} z_n + \varphi_0 \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n} z_1 + \varphi_0 \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n}, \dots, \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_n} z_n + \varphi_0 \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} \quad (*)$$

$$(\textcircled{*}) \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau_j} = z_i \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_j} + \frac{\partial z_i}{\partial \tau_j} \varphi_0$$

(*) の右辺で、行列式の中の、 φ_0 列 ($j \geq 2$) の φ_0 行に、 $\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_i}$ をかけて、 φ_0 行からひくと

$$* = \varphi_0^{n+1} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_2, \dots & z_n \\ 0 & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1}, & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n}, & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} = \varphi_0^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1}, & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n}, & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix}$$

$$\varphi_0^{n+1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad \text{であるから,}$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ の τ に関する, Wronskian $W(\varphi_0, \dots, \varphi_n) = 1$,

従って、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y) = \frac{\partial^2 y}{\partial \tau_i \partial \tau_j} + \sum_{\alpha=1}^n R_{ij}^{(\alpha)}(\tau) \frac{\partial y}{\partial \tau_\alpha} + R_{ij}^{(0)}(\tau) y$

($1 \leq i, j \leq n$) は、半標準形で、 φ_i ($0 \leq i \leq n$) 達の、とり方から、

$$z_i = \varphi_i(\tau) / \varphi_0(\tau) \quad \text{である。}$$

よって、定理は、証明された。

g.e.d //

注 $n=1$ の時は、上の定理は、よく知られている。

(例へば、Ford, Automorphic Functions)

次に、基本解が、代数函数である時、半標準^形のモノドロミー群について調べよう。

D を \mathbb{C} のある領域として、 $\pi_1(D, \tau_0)$ を、基点 τ_0 に関する、基本群であるとする。さらに、 ρ を、rank $n+1$ の完全積分可能な、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) の一組の、基本解 $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ に関する、モノドロミー表現であるとする。即ち、基点 τ_0 を持つ D 内の loop ℓ に対して、その homotopy class を $[\ell]$ で表わし、 $\rho([\ell]) = \sigma \in GL(n+1, \mathbb{C})$ とすれば、微分方程式系 $L_{ij}(P|\tau, y)$ ($1 \leq i, j \leq n$) の基本解 $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ は、loop ℓ にそっての、解析接続により、

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \longrightarrow \sigma \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} \quad \sigma \in \rho(\pi_1(D, T_0))$$

という変換を受ける.

$$z_i = \varphi_i(\tau) / \varphi_0(\tau), \quad (1 \leq i \leq n), \quad \tau_i = t_i(z), \quad z = (z_1, \dots, z_n)$$

$(1 \leq i \leq n)$ をその逆変換とする.

定理 2.3 $L_{ij}(\rho(\tau, y)) \ (1 \leq i, j \leq n)$ を rank $n+1$ の、完全積分可能な微分方程式系で、半標準形であるとする。そして、上で定義した、 $\tau_i = t_i(z) \ (1 \leq i \leq n)$ が変換.

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \longrightarrow z = (z_1, \dots, z_n)$ の D の image 上で "single-valued" な函数であるとする。もし、微分方程式系,

$L_{ij}(\rho(\tau, y)) \ (1 \leq i, j \leq n)$ の基本解 $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ がすべて τ の代数函数であるならば、 $\rho(\pi_1(D, T_0))$ の任意の元 σ に対して,

次の (i) または、(ii) が成り立つ.

$$(i) \quad \sigma^h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & & \end{pmatrix} \in \rho(\pi_1(D, T_0))$$

となる。整数 h , $1 \leq h < ord \sigma$ が存在する.

(ii) $K = \mathbb{C}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ とした時,

$$ord \sigma \leq [K(\varphi_0^{n+1}) : K].$$

proof.

任意の $1 \leq h < ord \sigma$ について、 σ^h が $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & & \end{pmatrix}$ という

形をしていなくて、 $\text{ord } \sigma > [K(\varphi_0^{n+1}) : K]$ であつたとしても、
 う。仮定から、 $\varphi_0(\tau), \dots, \varphi_n(\tau)$ の Wronskian $W(\varphi_0 \dots \varphi_n)$ は、
 zero でない、ある定数である。定理 [] の証明の、最後の
 所で示したように、

$$W(\varphi_0 \dots \varphi_n) = \varphi_0^{n+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_1}{\partial \tau_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z_n}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial z_n}{\partial \tau_n} \end{vmatrix} = c' (\text{constant})$$

である。

$$\text{よつて、} \quad \varphi_0^{n+1} = c \begin{vmatrix} \frac{\partial \tau_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \tau_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \tau_n}{\partial z_n} \end{vmatrix} \quad (c: \text{constant})$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n0}, a_{n1}, \dots, a_{nn} \end{pmatrix} \in GL(n+1, \mathbb{C}) \quad \text{とすると、loop } \ell$$

によつて、1 回りした時、 $z = (z_1, \dots, z_n)$ は、

$$z = (z_1, \dots, z_n) \longrightarrow [\sigma] \cdot z = \left(\frac{a_{10} + a_{11}z_1 + \dots + a_{1n}z_n}{a_{00} + a_{01}z_1 + \dots + a_{0n}z_n}, \dots, \frac{a_{n0} + a_{n1}z_1 + \dots + a_{nn}z_n}{a_{00} + a_{01}z_1 + \dots + a_{0n}z_n} \right)$$

という変換を受ける。仮定により、 $\tau_i = f_i(z)$ ($1 \leq i \leq n$) は、
 single valued な函数であるから、 $f_i(z) = f_i([\sigma] \cdot z)$ ($1 \leq i \leq n$)
 である。さて、

$$\sigma \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma\varphi)_0 \\ \vdots \\ (\sigma\varphi)_n \end{pmatrix} \quad \text{とすれば、}$$

$$W((\sigma\varphi)_0, \dots, (\sigma\varphi)_n) = \det \sigma \cdot W(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$$

で、 $L_{\mathbb{P}}(\text{PII}, \varphi)$ が半標準形であるので、 $\det \sigma = 1$ 。よつて
 、 $\rho(\pi(v, \tau_0)) \subset SL(n+1, \mathbb{C})$ である事に注意する。

Lemma [2.1] から、 $\varphi_0^{n+1}(\tau)$ もその函数と思つたものを、 $\Phi(z)$ と

$$\text{書く事にすると} \quad \Phi([0] \cdot z) = (a_{00} + a_{01}z_1 + \dots + a_{0n}z_n)^{n+1} \Phi(z)$$

である。 φ_0^{n+1} は、 τ_1, \dots, τ_n の代数函数であるから、 τ_1, \dots, τ_n の

有理函数、 $\tilde{p}_0(\tau), \dots, \tilde{p}_m(\tau)$ が存在して、(ただし、 $m = [K(\varphi_0^{n+1}) : K]$)

$$\tilde{p}_0(\tau) \varphi_0^m + \tilde{p}_1(\tau) \varphi_0^{m-1} + \dots + \tilde{p}_m(\tau) = 0.$$

$\tilde{p}_0(\tau), \dots, \tilde{p}_m(\tau)$ も、 z の函数で考えたものを $p_0(z), \dots, p_m(z)$

とすると、 $p_i([0] \cdot z) = p_i(z)$ ($0 \leq i \leq m$) である。ここで

$\tilde{a}_0(z) = a_{00} + a_{01}z_1 + \dots + a_{0n}z_n$ と書く事にすれば、次の関係

式を得る。

$$\begin{cases} p_0(z) \Phi^m(z) + p_1(z) \Phi^{m-1}(z) + \dots + p_m(z) = 0 \\ a_{10}^m p_0(z) \Phi^m(z) + a_{11}^{m-1} p_1(z) \Phi^{m-1}(z) + \dots + p_m(z) = 0 \\ \vdots \\ a_{m0}^m p_0(z) \Phi^m(z) + a_{m1}^{m-1} p_1(z) \Phi^{m-1}(z) + \dots + p_m(z) = 0 \end{cases}$$

$$\left(\text{ただし、} a_i(z) = \tilde{a}_{0i}^{n+1}(z) \right) \\ (1 \leq i \leq m)$$

従つて、

$$\begin{vmatrix} 1, & \dots, & 1 \\ a_{10}^m, & a_{11}^{m-1}, & \dots, & 1 \\ \vdots & & & \\ a_{m0}^m, & a_{m1}^{m-1}, & \dots, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

すなわち、ある整数 $1 \leq i \leq m$ が存在して、 $a_i(z) = 1$ か、又は、

i, j ($i \neq j$) が存在して、 $a_i(z) = a_j(z)$ となるかの、どちら

かかおこる。 $i > j$ なら、 $a_i(z) = a_{i-j}([g^{ij}]z) a_j(z)$

$\therefore [g^{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & & \end{pmatrix} \in \text{PSL}(n+1, \mathbb{C})$ 矛盾 //

Appendix I.

ここでは、ある微分方程式系の半標準形について述べる。

$D \subset \mathbb{C}^n$: 領域

$\tau = (\tau_1, \dots, \tau_n) \in D$. とする.

今、次の微分方程式系が、 $\text{rank} \begin{pmatrix} n+d-1 \\ d-1 \end{pmatrix}$ の d 階の、完全積分可能な微分方程式系であるとす。

$$L_{i_1 \dots i_d}(p(\tau, y)) = \frac{\partial^d y}{\partial \tau_{i_1} \dots \partial \tau_{i_d}} + \sum_{(d_1, \dots, d_d)}^{d_1, \dots, d_d} p_{i_1 \dots i_d}(\tau) \frac{\partial^{d_1} y}{\partial \tau_{d_1} \dots \partial \tau_{d_d}}$$

(但し、 $0 \leq d < d$, $1 \leq i_j \leq n$) とする。

上の微分方程式系の N 個 ($N = \begin{pmatrix} n+d-1 \\ d-1 \end{pmatrix}$) の基本解を

$\varphi_1, \dots, \varphi_N$ とする。 $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ の Wronskian を

$$W_{\varphi_1, \dots, \varphi_N} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_N \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial \tau_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_d} & \dots & \frac{\partial \varphi_N}{\partial \tau_d} \end{vmatrix}$$

右に列には、 φ_k の $d-1$ 階以下の全ての偏微分をなす。

と定義する。 φ_1 と同様に、次の定義をする。

Def. $W_{\varphi_1, \dots, \varphi_N}$: non-zero, constant の時、上の微分方程式系 $L_{i_1 \dots i_d}(p(\tau, y))$ は、半標準形であると呼ぶ。

G_1 を、 φ_1 のようにして、定義すると、

Prop. G_1 の作用で、上の微分方程式系は、半標準形に移す事ができる。

注意. 別の type の標準形について、森川寿氏によつて、

興味ある。例が知られている。

Appendix 2.

以下では、特にことわらなければ、

$D: \mathbb{C}^n$ の homogeneous domain. $C: D$ の特性多様体で、その real 次元 $= n$.

D は、Cauchy kernel $H(z, \xi)$ を持ち、(ie. $\forall f(z) \in \text{Hol}(DUC)$

$f(z) = c' \int_C f(\xi) H(z, \xi) d\xi$ (c' はある const) となる $H(z, \xi)$ が存在する.) Cauchy kernel $H(z, \xi)$ が \mathbb{C}^n 上の z についての正則函数 $f(z, \xi)$ のある複素巾として書けている (ie. $H(z, \xi) = f(z, \xi)^p$) と仮定する.

定理

(i) z の微分作用素 $D_z = P(z, D)$ で、

$$D_z^n f(z, \xi)^p = b_n(\eta) f(z, \xi)^{p-n} \text{ をみたすものが存在する.}$$

る.

$$(ii) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{n-\eta}{2\alpha}} \in \text{Hol}(DUC) \quad (\text{ただし, } \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right) = \det \left(\frac{\partial z_i}{\partial w_j} \right))$$

$$(iii) \quad \exists P(w)^{-\frac{n-\eta}{2\alpha}} \in \text{Hol}(DUC) \text{ s.t. } P(w)|_C = \overline{\left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)}|_C$$

$$(iv) \quad \exists Q(w) \in \text{Hol}(D) \text{ s.t. } Q(w)|_C = \frac{b_n(\eta, w)}{b_n(\eta, z)}|_C$$

$$\left(\text{ただし, } w = \sigma(z), \quad \eta = \sigma(\xi) \right. \\ \left. \sigma \in \text{Aut}(D) \right)$$

$\Rightarrow \varphi(w) \in \text{Hol}(D)$ に対して、

$$h(z) = \varphi(w) P(w)^{-\frac{n-\eta}{2\alpha}} Q(w) \text{ とおけば}$$

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{-\frac{n-\eta}{2\alpha}} D_w^n \varphi(w)$$

proof.

$$h(z) = c \int_C H(z, \xi) h(\xi) d\xi \quad \text{に注意すれば,}$$

$$\begin{aligned} D_z^n h(z) &= c \int_C H(z, \xi) h(\xi) d\xi \\ &= c \int_C b_n(\alpha, \xi) H(z, \xi)^{\frac{\alpha-n}{\alpha}} h(\xi) d\xi \quad * \end{aligned}$$

ここで $\xi \rightarrow \eta$ と変数変換をすれば,

$$H(z, \xi) = H(w, \eta) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad \text{に注意して,}$$

$$\begin{aligned} * &= \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{\alpha}} c \int_C b_n(\alpha, \eta) H(w, \eta)^{\frac{\alpha-n}{\alpha}} \varphi(\eta) d\eta \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{\alpha}} D_w^n \varphi(w) \end{aligned}$$

g.c. 4.11

ex. 定理の条件 (i) をみたす D_2 が存在して,

$$(i) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{\alpha-n}{\alpha}} \in \text{Hol}(D \cup C)$$

$$(ii) \quad b_n(\alpha, \xi) = b_n(\alpha, \eta)$$

$$(iii) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right) \Big|_{\substack{z=\xi \\ w=\eta}} : \text{real valued}$$

$\Rightarrow \varphi(w) \in \text{Hol}(D)$ に対して

$$h(z) = \varphi(w) \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{\alpha-n}{\alpha}-1} \quad \text{とおけば,}$$

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{\alpha}} D_w^n \varphi(w)$$

注意: 定理の条件がみたされている時,

$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{\frac{\alpha-n}{2\sigma}} D_w^n \varphi(w) = S^{[n]}(z(w))$ とおけば、 $z = \sigma w$ の時 (ただし、 $\sigma \in \text{Aut}(D)$)、 $S^{[n]}(z) = 0$ 、この事に注意して、次の定義をする。

定義 (n -th φ -Schwarzian derivative)

領域 D, D' は互いに、双正則とし、

$$\begin{array}{ccc} D & \longleftrightarrow & D' \\ \downarrow z & & \downarrow w \\ \mathbb{C} & \longleftrightarrow & \mathbb{C} \end{array}$$

D が定理の C_n の条件を満足するとする、 $\alpha+n \neq 0$ のとき、

$$h(z) = \varphi(w) \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{\alpha-n}{2\sigma}-1} \text{ とおくとき、}$$

$$D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{2\sigma}} D_w^n \varphi(w) + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{\alpha-n}{2\sigma}} \varphi(w) \{z, w\}_{\varphi(w)}^{[n]}$$

によって、 $\{z, w\}_{\varphi(w)}^{[n]}$ を定義し、これを n -th φ -Schwarzian derivative と呼ぶ。

Prop.

$$(i) \quad \{\sigma w, w\}_{\varphi(w)}^{[n]} = 0 \quad (\sigma \in \text{Aut } D)$$

$$(ii) \quad \{\sigma z, w\}_{\varphi(w)}^{[n]} = \{z, w\}_{\varphi(w)}^{[n]}$$

$$(iii) \quad w = w(v) \quad \mu(w) = \varphi(w) \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^{1-\frac{\alpha-n}{2\sigma}} \text{ のとき、}$$

$$\{z, v\}_{\mu}^{[n]} = \{w, v\}_{\mu}^{[n]} + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^{-\frac{n}{\sigma}} \{z, w\}_{\varphi}^{[n]}$$

$$(iv) \quad \{z, w\}_{\varphi}^{[n]} + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{-\frac{n}{\sigma}} \{w, z\}_{\varphi} = 0$$

証明は、§1. Lemma [] と同様にすれば、できる。

prop. $f: D \rightarrow D$: holomorphic map.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\quad} & Z(W) \end{array}$$

2. $f(C) = C$, $z'' \ni \eta \in \mathbb{Z}^+$ (s.t. $s+\eta \neq 0$, $\{z, w\}_{\varphi(w)}^{[n]} = 0$,

for $\forall \varphi \in \text{Hol}(D)$)

$\Rightarrow f \in \text{Aut}(D)$

proof. $z = f(w)$, $\xi = f(\eta)$. とする. 仮定より,

$$h(z) = \varphi(w) \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{1-n}{2}} \quad \text{と お'けば!} \quad D_z^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{1-n}{2}} D_w^n \varphi(w).$$

従って,

$$\left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{1-n}{2}} D_z^n h(z) = c' \int_C H(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^{\frac{1-n}{2}} \varphi(\eta) \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \dot{\eta}$$

(但し, c' は 定数 constant).

$$\text{一方, } D_w^n \varphi(w) = \int_C H(w, \eta)^{\frac{1-n}{2}} \varphi(\eta) \dot{\eta}$$

$$\text{よって, } H(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{\partial z}{\partial w} \right)^{\frac{1-n}{2}} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \eta} \right)^{\frac{1-n}{2}} = Q(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} \text{ と お'けば}$$

$$\int_C Q(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} \varphi(\eta) \dot{\eta} = \int_C H(w, \eta)^{\frac{1-n}{2}} \varphi(\eta) \dot{\eta}$$

よって, $\varphi(\eta) = H(w, \eta)^{\frac{n}{2}} p(\eta)$ $p(\eta) \in \text{Hol}(D \cup \bar{C})$ と お'ければ,

$$\int_C Q(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} H(w, \eta)^{\frac{n}{2}} p(\eta) \dot{\eta} = \int_C H(w, \eta) p(\eta) \dot{\eta} = p(w)$$

よって, $Q(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} H(w, \eta)^{\frac{n}{2}}$ も $H(w, \eta)$ と 同じ働きを持つ事
 がわかる. たから, $Q(z, \xi)^{\frac{1-n}{2}} H(w, \eta)^{\frac{n}{2}} = H_1(w, \eta)$

$$\text{とおくと, } H_1(w, \eta) = \int_C H_1(z, \eta) H(w, \xi) \dot{\xi} = H(w, \eta)$$

この事から, $f \in \text{Aut}(D)$ に属する事がわかる。

$\text{Aut}(D)$ の discrete な部分群 Γ に対して、 D 上の正則函数 $\varphi(w)$ が、
 $\varphi(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^{\frac{n}{2}} \varphi(w) \quad (z = \sigma(w) \text{ for } \forall \sigma \in \Gamma)$

をみたす時、 $\varphi(w)$ を、weight n の Γ に関する、保型形式であると、ここでは、言う事にする。

$A(\Gamma, n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{weight } n \text{ の } \Gamma \text{ に関する保型形式、全体のなす} \}$
 vector space

以下、領域 D は、定理 [1] の Cor の仮定をみたす、領域' であるとする。以下では、Schwarzian derivative と保型形式' の関係について、述べる。

Lemma

D' は、 D に双正則な領域' とし、 $\Gamma' \subset \text{Aut}(D')$ を discrete group とし、 $\varphi(\tau) \in A(\Gamma', -n-n)$ と仮定する。この時、
 $\forall \sigma \in \Gamma'$ に対して

$$\{z, \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} = \{z, \tau\}_{\varphi(\tau)}^{[n]} \left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau} \right)^{\frac{n}{2}}$$

証明は、§1, Lemma [] と同様であるので省略する。

Lemma

$\varphi(\tau) \in A(\Gamma', -n-n)$, $\{z(\tau), \tau\}_{\varphi(\tau)}^{[n]} \in A(\Gamma', 2n)$

$$\Rightarrow \{z(\sigma\tau), z(\tau)\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} = 0 \quad (\text{ただし、} h(\tau) = \varphi(\tau) \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{-\frac{n-n}{2}})$$

proof. 仮定から、 $\{z(\sigma\tau), \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} = \{z, \tau\}_{\varphi}^{[n]} \left(\frac{\partial(\sigma\tau)}{\partial\tau} \right)^{\frac{n}{2}}$

従って、前の Lemma より、 $\{z(\sigma), \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} = \{z(\sigma\tau), \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]}$

prop [] の (ii) によれば、

$$\{z(\sigma\tau), \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} = \{z(\tau), \sigma\tau\}_{\varphi(\sigma\tau)}^{[n]} + \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)} \right)^{-\frac{n}{2}} \{z(\sigma\tau), z(\tau)\}_{\varphi(\sigma\tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial(\sigma\tau)} \right)^{\frac{n}{2}}}^{[n]}$$

よって、 $\{z(\sigma, \tau), z(\tau)\}_{\varphi(\sigma, \tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}}}^{[n]} = 0$. 仮定から、

$$\varphi(\sigma, \tau) = \varphi(\tau) \left(\frac{\partial \varphi(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}} \text{ だから、 } \varphi(\sigma, \tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}} = \varphi(\tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}}$$

だから、 $\varphi(\sigma, \tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}} = \varphi(\tau) \left(\frac{\partial z(\tau)}{\partial \sigma} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}}$ よって $\{z(\sigma, \tau), z(\tau)\}_{\varphi(\tau)}^{[n]} = 0 //$

この Lemma の証明の方法から、容易に次の Lemma を得る。

Lemma D と D' は双正則とし、 $\sigma \in \Gamma \subset \text{Aut}(D')$ の時、次の

写像 σ ,
$$\begin{array}{ccc} \sigma: D & \xrightarrow{\quad} & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ z(\tau) & \xrightarrow{\quad} & z(\sigma, \tau) \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\quad} & D' \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \xrightarrow{\quad} & \sigma \end{array} \right) \text{ がい}$$

$\sigma \in \text{Aut}(D)$ の時、 $\varphi(\tau) \in A(\Gamma, -n-1)$

$\Rightarrow \{z(\tau), z\}_{\varphi(\tau)}^{[n]}$ は D' 上の関数と見た時、weight $2n$ の Γ' に属する、保型形式である。

次に、この Lemma の条件が、満足される場合について、考える。

Lemma

$$\begin{array}{ccc} z \in D & \xrightarrow{\quad \sim \quad} & D \\ \uparrow \text{双正則} & \circlearrowleft & \downarrow \text{双正則} \\ \tau \in D' & \xrightarrow{\quad \sigma \quad} & D' \end{array}$$

D と D' が双正則で左の図が可換の時、

$\sigma \in \Gamma'$ に対して、 $\text{Aut}(D)$ の元 $\tilde{\sigma}$ を対応させる写像

$$\begin{array}{ccc} \Gamma' & \xrightarrow{\quad} & \text{Aut}(D) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \tilde{\sigma} \end{array}$$

による Γ' の image を Γ とする。

$\varphi(\tau) \in A(\Gamma, -n-1)$. 2" $h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{-\frac{2-n}{2\sigma}} \varphi(\tau)$ とおけば、

$D \ni h(z)$ は、 D 上の関数と見た時、 Γ に関する、weight $n-1$ の保型形式である。(但し、ここで、 $n=0,1,2,\dots, n+1 \neq 0$ とする)

proof. $n=0$ の時.

$$\begin{aligned} h(\tilde{\sigma}, z) &= \left(\frac{\partial z(\sigma, \tau)}{\partial(\sigma, \tau)} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} \varphi(\sigma, \tau) = \left(\frac{\partial z(\sigma, \tau)}{\partial(\sigma, \tau)} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} \left(\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} \varphi(\tau) \\ &= \left(\frac{\partial z(\sigma, \tau)}{\partial(\sigma, \tau)} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} \varphi(\tau) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}, z)}{\partial \tilde{\sigma}} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} h(z) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } h(\tilde{\sigma}, z) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}, z)}{\partial \tilde{\sigma}} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} h(z).$$

$\varphi(\sigma, \tau) = \left(\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} \varphi(\tau)$ だから, 定理 17 の, Cor. により,

$D_{\tau}^n \varphi(\tau)$ は, weight $n-\alpha$ の保型形式である事に注意すれば,

$$D_{\tilde{\sigma}}^n h(z) = \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} D_{\tau}^n \varphi(\tau) + \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{\frac{n-1}{2\alpha}} \varphi(\tau) \{z, \tau\}_{\varphi(\tau)}^{(n)}$$

である。従って,

$$p(\tau) = \left(\frac{\partial z}{\partial \tau} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} D_{\tilde{\sigma}}^n h(z) \text{ は, } \tau \text{ の函数と見た場合, weight,}$$

が $n-\alpha$ の保型形式である。

$$p(\sigma, \tau) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}, z)}{\partial(\sigma, \tau)} \right)^{\frac{1-n}{2\alpha}} D_{\tilde{\sigma}, z}^n h(\tilde{\sigma}, z) = \left(\frac{\partial(\sigma, \tau)}{\partial \tau} \right)^{\frac{n-1}{2\alpha}} p(\tau)$$

に注意すれば,

$$D_{\tilde{\sigma}, z}^n h(\tilde{\sigma}, z) = \left(\frac{\partial(\tilde{\sigma}, z)}{\partial \tilde{\sigma}} \right)^{\frac{n-1}{2\alpha}} D_{\tilde{\sigma}}^n h(z). \quad \text{q.e.d.}$$